RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 20 luglio 1902.

Geologia. — *I terreni terziari della provincia di Roma. II. Miocene medio.* Nota del Corrisp. CARLO DE STEFANI.

Molte incertezze rimangono ancora nei terreni miocenici. In generale sono a distinguere due zone; una inferiore calcarea, organogenica; però, come è in parte anche nel resto dell'Appennino, abbastanza multiforme; una superiore arenacea, marnosa e argillosa.

Comincerò dalla zona inferiore e dalla regione più settentrionale. Proprio al confine della Provincia con la Maremma Grossetana, verso il littorale, nella fattoria della Pescia Romana sulla sinistra del Chiarone, nel poggetto isolato che è rimpetto alla fattoria di Garavicchio e quale ultima continuazione del lembo non molto esteso di questo luogo, trovasi il calcare a briozoi solito, del tipo delle terme d'Acqui, ma specialmente di Bismantova, della Verna, di San Marino, del Sasso di Simone, ecc., appartenente al Miocene medio, ed è il lembo più prossimo al mare che io conosca, essendo tutti gli altri situati piuttosto addentro e in alto nella catena Appenninica [1].

Un altro piccolo lembo di questa età trovai nel versante settentrionale dei Monti della Tolfa al Poggio Caprarecciolo fra i calcari eocenici e le marne gessifere del Miocene superiore e le Trachiti. È rappresentato da brecciola e da calcare giallastro nel quale vidi un *Pecten* cfr. *aduncus* Eichw.: ricorda il *Leithakalk* ed il calcare di Rosignano in Toscana ed è

[1] Il Lotti pone nel Miocene anche il locale conglomerato quaternario che ricopre il calcare ad *Amphistegina*.

l'unico lembo di tale natura a me noto nella provincia romana (1). Non era mio scopo fare ricerche sull'estensione di esso; ma credo fermamente se ne debba trovare ancora ne' tratti vicini.

Lembi assai maggiori si trovano nei dintorni di Subiaco nell'alta valle dell'Aniene, e nel bacino del Sacco.

Presso Subiaco, direttamente sopra la Creta, sono calcari grigio-chiari o grigio-rossastri, talora compattissimi, interamente costituiti da frantumi di *Gyroporellae*, Foraminifere, Coralli, Crinoidi, Echini, Molluschi, Briozoi, e pieni specialmente, in tutti i loro strati, di *Pecten*, onde furono detti giustamente calcari a *Pecten*. Mancano i *Lithothamnium*. In alcuni strati, fra i più bassi, abbonda una Foraminifera delle dimensioni d'un grano di miglio, apparentemente di una sola specie, che fu ritenuta una *Nummulites*; però diversa da tutte le piccole Nummuliti dell'Eocene superiore e da quelle del Miocene inferiore. Si trova più rara, talora rarissima, fino negli strati calcarei più alti.

Non ne ho potuto osservare la superficie esterna, nè una sezione longitudinale netta con la camera centrale: varie sezioni trasversali sono a contorno depresso, ed assimmetriche, più convesse da una parte che dall'altra, come le *Amphisteginae*, perciò le credo tali. Del resto l'identica forma di Nummulitidee trovasi nel calcare organogenico del Sasso di Simone alle Vene del Tevere nell'Umbria incontestabilmente attribuito al Miocene medio (2).

Vi sono anhe *Rotalinae*, *Polystomellae*, *Textilariae*, *Operculinae*, *Orbitoides (Lepidocyclina* e *Miogypsina)*. È abbastanza frequente, anche negli strati inferiori, e ben si distingue nelle sezioni, la *Miogypsina*, sotto genere di *Orbitoides* proprio del Miocene medio, vicina o identica alla *M. irregularis* Michlt. della collina di Torino. La troveremo anche altrove nella Provincia e pure essa trovasi nel calcare del Miocene medio del Sasso di Simone.

Fra le bivalvi ho notato le seguenti specie: *Ostrea cochlear* Poli, *Anomia ephippium* L., *A. costata* Broc., *Pecten Malvinae* Dub., *P. Haveri* Michl. (3), *P.* cfr. *scabriusculus* Mich., *P.* cfr. *Manzonii* Fuchs, *P.* cfr. *revolutus* Michelotti, *P.* cfr. *planosulcatus* Math., *P.* cfr. *granulato-scissus*

(1) Non è indicato nell'ottima carta del Tittoni, nè in quelle successive dell'Ufficio geologico. Esso ha una situazione stratigrafica consimile a quella del piccolo lembo miocenico, non accennato dal Lotti, che sta fra i calcari eocenici e le trachiti di Campiglia a sud-ovest del Poggio Menicosoli scendendo alle Pilete.

(2) Anche nel calcare a crinoidi del Miocene medio di Pietra Bismantova il Malagoli indica tre *Nummulites*, due delle quali, quelle della tav. I, certamente sono *Rotalidae* od altra cosa, ed una è dubbia. Anche a San Marino fu prima notata, poi corretta, una supposta *Nummulites*: il calcare di San Marino, abbondantemente fossilifero, appartiene in ogni modo al Miocene medio.

(3) Alcuni esemplari discretamente conservati, anche a coste depresse, sono certo ben distinguibili dal *P. quinquepartitus* Blanckenhorn dell'Eocene di Siria, perchè gli

Nelli, *Cardium* sp. Poichè si tratta quasi solo di nuclei che possono essere discussi ho messo dei nomi approssimativi, quantunque i *Pecten* siano distinguibili anche dalla sola impronta della parte interna. Quand'anche si tratti quasi di sole approssimazioni e quand'anche le specie si indicassero tutte con nomi nuovi insieme con le specie nuove che è pur possibile esistano (1), pure le forme indicate trovano analogie complete, non già nel Miocene inferiore o nell'Eocene, pur già paleontologicamente tanto noti e sotto tutte le loro forme batimetriche in Italia e nelle regioni vicine, ma solo nel Miocene medio.

Del resto e roccia e modelli sono perfettamente identici a quelli che, insieme a fossili meglio conservati del Miocene medio, scopriva in tutto l'Appennino Aquilano il Chelussi, acuto sceveratore della geologia di quella regione.

Per tali ragioni, si debbono ritenere i calcari a *Pecten* e briozoi di Subiaco appartenenti al Miocene medio come i calcari seguenti. Quei calcari superiormente, in breve altezza di strati, fanno passaggio alle arenarie di cui si dirà poi, diventano grigio-scuri e glauconitici e con la stessa ancor rarissima *Amphistegina*, o altro che sia, e con qualche solito *Pecten*, contengono altre bivalvi e Gastropodi certamente appartenenti al Miocene medio.

Nel bacino del Sacco a Ferentino, al Camposanto e sotto la città a immediato contatto con la Creta, si ripete il calcare, inferiormente talora grigio-scuro, quasi carbonioso, e passante ad una salda arenaria, poi chiaro, sempre screziato, superiormente per larghi tratti compatto e assai marnoso. Inferiormente ho veduto talora la solita Nummulitidea: il calcare è sempre organogenico e costituito da minutissimi frantumi di organismi grossolani; però superiormente, dove è più marnoso, lo compongono quasi solo minute foraminifere di mare profondo. Rari strati qui presentano sulla superficie ben conservati briozoi.

Il calcare chiaro, a briozoi, a *Miogypsina* ed altre foraminifere, *Conocrinus*, radioli d'Echino, frammenti di *Pecten* e di qualche altro mollusco, si ripete sul Sacco, a Sgurgola e a Morolo, immediatamente sopra la Creta come a Ferentino. Indipendentemente da questa lo ritroviamo più a valle a

---

spazi fra le costole rilevate non sono occupati dalle sottilissime lamine trasversali. Vari nuclei appartenenti probabilmente al *P. Haveri* sono identici a nuclei di Acqui, di S. Marino, di Monte Cedrone, l'età de' cui terreni non è discussa.

(1) Nel Miocene medio dell'Atlantico e specialmente del Mediterraneo il genere *Pecten* ebbe forse il suo massimo sviluppo. Quasi ogni specie di *Pecten* è abbastanza polimorfa anche da un luogo all'altro, sì da giustificare apparentemente chi moltiplicasse il numero delle specie, alla quale strada si attennero fra i nostri recentissimi il Fuchs, il Viola, il Bonarelli. Pur nella relativa polimorfia che ha luogo entro non ampi confini, le specie serbano il loro tipo costante che le fa riconoscere. Il più avveduto nella distinzione delle specie mi sembra sia stato il Sacco.

Ceccano. È più chiaro e talora più compatto, sempre con rarissima *Miogypsina*, *Operculina*, e rari *Pecten* che ritengo *P. scabrellus* Lck., *P. scabriusculus* Mich., determinazioni in accordo, salvo che nel nome adottato, con quelle del Mayer che pur vide *Pecten* di quel luogo e li ritenne miocenici. Talora sulla superficie corrosa degli strati appaiono briozoi (*Salicornaria*, *Membranipora*, *Eschara*, etc.), in sì perfetta conservazione, che meriterebbero di essere studiati, con articoli di Crinoidi e radioli d'Echino. Non ho visto *Lithothamnium* perchè i depositi, quantunque di scogliera, non dovevano essere tanto superficiali (1).

Degnissimo di nota è l'ultimo lembo da me notato più a valle, presso San Sozio sotto Falvaterra all'estremo confine meridionale con la Terra di Lavoro. Ivi sopra la Creta il calcare è grigio ed interamente costituito da *Miogipsyna* di grande dimensione (2).

In conclusione, l'età dei calcari esaminati, da attribuirsi al Miocene medio, non è da mettere in dubbio. I fossili non sono strettamente littorali ma appartengono alla plaga Elveziana, di non grande profondità.

Questi calcari organogenici, nell'Appennino occupano, fino ad Acqui, a settentrione, la parte inferiore del Miocene medio (3) ed hanno generalmente una fauna di plaga batimetrica Elveziana. Gli studî paleontologici non sono ancora abbastanza avanzati, causa anche l'imperfetta conservazione dei fossili, in modo da far constatare quali differenze vi siano dagli strati Elveziani che ordinariamente formano la zona superiore (4).

(1) Simili lembi di calcari miocenici a briozoi si trovano in altri punti delle valli dell'Aniene e del Sacco; ma non avendone raccolto esemplari non li accenno. Si ripetono anche presso Sora ed in qualche altro punto della valle del Liri.

(2) Le *Miogypsinae*, comuni nei calcari miocenici della provincia di Roma e di tutto l'Appennino settentrionale, sono distintive del Miocene medio del Bordelese e della Collina di Torino, specialmente della plaga Elveziana. Da molti anni avevo osservato delle *Orbitoides*, con *Lithothamnium*, nei calcari terrosi Elveziani di S. Fiorenzo in Corsica.

(3) Recentemente anche il Capellini, maestro preclarissimo nella conoscenza di tali terreni, affermava l'appartenenza al Miocene medio del calcare di San Marino.

(4) De Alessandri ha tentato di mostrare che il calcare di Acqui è aquitaniano. Ad una quantità di fossili determinati senza incertezza e che sono tutti Elveziani, ne aggiunge tre o quattro esplicitamente dichiarati incerti o mal conservati che apparterrebbero al Miocene inferiore. Si comprende che questi ultimi fossili sono tanto mal conservati da non prestarsi ad una classificazione. Ciò non basta a portare in piano diverso un terreno i cui fossili conservati, se De Alessandri avesse giudicati senza conoscere la provenienza, avrebbe attribuiti all'Elveziano.

Il Sacco sostiene ora che l'Aquitaniano, cui egli attribuiva il calcare di Acqui, deve essere unito al Miocene medio; io credo questa sua opione indetta principalmente dagli studî del Trabucco, confermati da quelli d'Alessandri sul calcare predetto, e deve intendersi del suo speciale modo di vedere l'Aquitaniano; poichè l'Aquitaniano del Mayer e di altri, qualunque sia il suo valore, e salvo qualche errore locale, rientra nel Miocene inferiore, come per esempio gli strati di Cadibona nell'Appennino.

La determinazione dell'età dei predetti calcari rende meno faticosa la classificazione dei terreni successivi.

Questi sono molto estesi ed alti. Occupano tutta la valle del Licenza fino entro i confini dell'Umbria, quasi per intero la valle dell'Aniene salvo i suoi monti più alti, i monti a mezzogiorno di Tivoli e le pendici laterali al corso del Sacco e del Liri fino ai confini con la Terra di Lavoro.

Inferiormente sono marne bianche a foraminiferi, specialmente *Globigerinidae*, ed ostracodi, che talora diventano un compatto calcare bianco (Ceccano, Percile, Licenza, Mandela, Castel Madama etc.), e superiormente sono le stesse marne a *Globigerinidae*, ma pure, talora con *Cylindrites*, *Helminthoida* cfr. *labyrinthica* H., *Taonurus* etc., ed arenarie con frequenti tracce di legno carbonizzato. Vi si intercalano scarsi strati di calcare assai compatto, o minutamente screziato come quelli precedenti, argille, e puddinghe con ghiaiette minutissime, spesso interamente calcaree come solo calcarei sono i monti circostanti. Queste rocce si ripetono identiche nella valle del Liri e ricordano da vicino le marne ed arenarie coetanee dall'Umbria fino alla Romagna toscana ed alla valle della Sieve (1) ed il *Bisciaro* stesso delle Marche.

Trabucco pone gli strati di Acqui e consimili nel *Langhiano*, in quanto dà a questo nome un significato strettamente stratigrafico, quello di parte inferiore del Miocene medio; ma egli prescinde dai fossili, che, quando non si conoscesse lo strato donde provengono, farebbero metter questo nell'*Elveziano*, poichè, salvo per avventura alcuni appartenenti a marne intercalate, batimetricamente appartengono alla plaga Elveziana.

Il Sacco attribuisce gran parte dei calcari organogenici del Miocene dell'Appennino, salvo quelli di Acqui, all'Oligocene od all'Eocene; il Lotti li attribuisce quasi tutti all'Eocene.

Mayer, Sacco, Trabucco, De Alessandri non tengono conto delle complete diversità di fauna secondo le profondità dei mari, rivelate dai non più recenti studî talassografici, che sono la più importante scoperta moderna della biologia applicabile alla paleontologia, scoperta che è vanto del Jeffreys e specialmente del Seguenza nostro avere applicato allo studio dei terreni terziarii.

(1) Il Lotti attribuisce questi terreni alla parte inferiore dell'Eocene, perchè nella valle di Sieve, suo punto di partenza, ha interpretato a dirittura all'inversa la stratigrafia, come notò il Trabucco.

Coi varî spaccati che egli dà attraverso la val di Sieve sono d'accordo nelle linee generali per la parte che riguarda i terreni miocenici, cioè le sue arenarie inferiori sulla sinistra della Sieve. Questi formano il crinale dell'Appennino, presso che orizzontali in alto, e per lo più regolarmente sovrapposti all'Eocene nel versante Adriatico. Sulla Sieve, in basso, per effetto di inversioni frequenti ma non generali sembrano talora sottoposti all'Eocene ora medio, ora superiore. Il Lotti riconosce le inversioni ma invece d'interpretarle fondato sulla Paleontologia le interpreta in senso contrario, aggiungendo, per giustificar ciò, un anticlinale nei terreni miocenici che non esiste. Per quanto riguarda i terreni eocenici nella parte opposta della valle, il Lotti non ne interpreta esattamente la stratificazione, e inoltre ingannato da analogie litologiche, come a me pure prima che a lui, erroneamente, era accaduto, estende le marne mioceniche, le quali non passano sulla

I fossili sono scarsi e a nidi, ma se ne trovano. Uno studio paleontologico ne fece per l'Alta Valle dell'Aniene il De Angelis in un lavoro d'insieme che fra i lavori recenti sulla Geologia romana fatti con criterio scientifico va segnalato. Egli, citati gli Echini, i Briozoi, i Molluschi, i Coralli, le Foraminifere dei territorî di Sambuci, Mandela, Subiaco, Affile, li attribuisce al Miocene medio, specialmente al Langhiano (1).

Il Cacciamali ebbe fossili delle marne e delle arenarie di Monte San Giovanni Campano pur sempre nella Provincia, ma nel bacino del Liri.

Non vi ho mai trovato una *Nummulites*, nè d'altronde alcuno ve le indica in modo specifico. Nelle arenarie i fossili sono scarsissimi: ho veduto spesso dei *Bathysiphon* nei dintorni di Percile. Nelle puddinghe talora glauco-

---

destra della Sieve, dove sono invece le marne eoceniche a *Nummulites subirregularis*. Anche per la valle Tiberina il Lotti è tratto in inganno da parziali inversioni che alterano la serie locale.

Il Sacco segue il Lotti, adducendo come criterî paleontologici talune specie trovate nel Miocene medio, che sono comuni a terreni più antichi, ciò che per alcune si sapeva, e per altre non va inteso in senso troppo assoluto, trattandosi di varietà diverse, e che d'altronde non infirmano il valore delle specie peculiari. Il Sacco poi conclude che presterà sempre più fede ad una sola *Nummulites* che ad intiere faune. Il male è che a Porretta, in val di Sieve, nel *Bisciaro* non è nemmeno mai stata citata, fosse anche a torto, una sola *Nummulites*.

Il Bonarelli pure, dopo stabilita una successione di terreni imperfetta perchè fondata sopra caratteri litologici e sopra osservazioni stratigrafiche locali inesatte, dice che gli Pteropodi e le altre faune di quei terreni sono pseudomioceniche, cioè paiono mioceniche, ma sono oligoceniche od eoceniche. Però si conoscono abbastanza gli Pteropodi e le altre faune oligoceniche ed eoceniche isomesiche del Mediterraneo e delle regioni immediatamente vicine, e queste sono ben diverse; mentre le faune appenniniche nostre sono chiamate mioceniche, e tali furono ritenute in apparenza anche dal Bonarelli e dal Sacco perchè in realtà si trovano solo nel Miocene medio di tutto il Mediterraneo.

L'idea che io ho espressa già da molti anni che la parte inferiore di questi terreni possa appartenere al Miocene inferiore ha avuto conferma solo di recente in un pesce raccolto nell'arenaria al Ponte Nuovo presso Barberino di Mugello dal Bassani ritenuto appartenente al Tongriano superiore.

Il Lotti attribuisce all'Eocene pure l'arenaria *langhiana* della Porretta nel Bolognese. Sono d'accordo, in massima, con gli spaccati che egli ne ha dati; se non che l'arenaria eocenica del Monte Cavallo forma un anticlinale, per quanto in parte rovesciato, sotto le argille scagliose, come l'arenaria del Monte Granaglione la cui massa interna non appartiene punto, come intende il Lotti, a zona diversa, mentre l'arenaria miocenica di Porretta forma una piega concava rovesciata come tante ne sono nell'Appennino, in mezzo alle argille scagliose sempre concordanti che sono più antiche. Perciò l'arenaria di Porretta non si connette con quella eocenica che forma la massa interna del Monte Cavallo; ma con quella miocenica, benchè litologicamente poco diversa, che si trova sulla cresta del detto monte e che si torna a trovare sopra le argille, più a valle sul Reno.

(1) Il *Diodon gigantodus* Portis trovato nel calcare presso la stazione di Castel Madama, è possibile provenga dal Miocene invece che dall'Eocene. Il dott. Martelli ha trovato nei monti Tiburtini anche delle *Craticulariae*.

niose di Percile ho veduto *Ostrea cochlear* Poli, *Anomia radiata* Brc., *Pecten scabrellus* Lch., *P. Haveri* Mich., come nelle breccioline del bacino del Turano nel prossimo Abruzzo. Le marne presentano frequentemente delle *Globigerinae* e degli Ostracodi, e ritengo si abbia a trovare in esse l'intera fauna dello Zancleano inferiore di Seguenza [1]. In generale questi terreni sono depositi di mare assai profondo e sulla loro età non potrei trarre conclusione diversa da quella del De Angelis, che cioè appartengano alla plaga Langhiana del Miocene medio [2].

Matematica. — *Contributo alla teoria degli insiemi.* Nota del prof. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio U. Dini.

Lo studio di alcune quistioni pertinenti alla teorica delle Funzioni di variabili reali, toccate in una mia memoria preventiva: *Sulla determinazione dell'ordine di infinito* [3], mi ha portato a conclusioni che, mentre da un lato confermano i fatti che in quel lavoro furono annunziati, anche in quei punti dove per la affrettata redazione parevano men sicuri; d'altro

(1) Ho già detto altrove, descrivendo i terreni della Calabria, per quali ragioni ritengo debba attribuirsi al Miocene medio anzichè al Pliocene lo Zancleano inferiore del Seguenza. Suoi equivalenti paleontologici nell'Italia settentrionale e centrale sono stati riconosciuti dal Coppi le marne bianche di Montegibio, dal Silvestri quelle dell'alta Val del Tevere, tutte pur esse certamente mioceniche. Se in qualche punto della Valle del Mésima od altrove si sceverarono marne plioceniche o postplioceniche fra quelle che io o magari il Seguenza avevamo riunito con lo Zancleano, ciò non altera affatto le conclusioni sull'età del Zancleano inferiore, conclusioni che devono intendersi applicabili solo agli strati contenenti i fossili (foraminifere ed ostracodi) proprî di questo terreno e non ad altri.

(2) Nell'ultima *Carte géologique internationale de l'Europe* le argille, marne ed arenarie della parte centrale della Valle del Sacco sono giustamente attribuite al Miocene. Ciò sembrerebbe in contraddizione con alcuni lavori dell'Ufficio geologico; ma poichè in essi non sono indicati i successivi stadî di modificazione delle idee, è prudente astenersi dalle induzioni. Se non che non v'ha differenza fra i detti terreni indicati come miocenici e gli altri lasciati nell'Eocene. In generale nella Carta predetta e così nei monti a sud-est di Tivoli nella *Carta della Campagna romana,* salvo una sottile zona lungo la destra del Licenza e minimi lembi altrove, dovrebbero segnarsi come mioceniche tutte le masse attribuite all'Eocene nei monti fra Solmona e Avezzano e nei bacini dell'Aniene, del Sacco, e del Liri, poi una parte delle rocce del Corno grande al Gran Sasso e della Maiella. Così pure appartengono al Miocene i terreni (argille e marne) segnati come pliocenici sotto Mandela nella valle dell'Aniene e sotto Monte S. Giovanni Campano in quella del Liri, ed al Postpliocene i conglomerati calcari di Mandela.

Pur troppo gli studî dell'Ufficio predetto sui terreni terziarî della Provincia e delle regioni contermini, e sono la massima parte dell'Appennino, per mancanza di cognizioni paleontologiche, sono stati poco conclusivi, anzi, salvo pei dintorni di Viterbo dei quali si è occupato il valente Di Stefano, piuttosto negativi.

(3) Atti della Società dei naturalisti e matematici di Modena (1901).

lato hanno stretto rapporto con le teorie della integrazione definita impropria e delle serie di funzioni.

Non parrà quindi inutile che io brevemente le esponga; ciò che spero di poter fare con questa Nota e con alcune che la seguiranno fra breve.

In questa svolgerò alcune considerazioni sulla determinazione della *estensione esterna* (aüssern *Inhalt*) di un insieme lineare situato in un intervallo di ampiezza infinita.

Non credo sia stato osservato che non si giunge sempre allo stesso numero, quando si definisce la estensione esterna di un insieme Ξ situato nell' intorno $(x_0, \ldots + \infty)$ come il limite, per $x = \infty$, della estensione di quella parte di Ξ che è situata nell' intervallo $(x_0, \ldots x)$, o quando direttamente si cerchi il limite inferiore delle somme delle lunghezze dei segmenti che contengono punti o punti limiti di Ξ. Quest' ultimo limite può essere infinito, ed essere finito o nullo il primo: ed è il primo appunto che principalmente giova considerare.

Nemmeno credo sieno ancora state cercate le relazioni fra le estensioni esterne di due insiemi che si ottengono l' uno dall'altro, quando si eseguisce una trasformazione biunivoca, ordinata, continua della variabile reale x nella variabile reale $y = f(x)$, e si immagina che nell' intorno $(x_0, \ldots + \infty)$ sia situato un insieme di punti di determinata estensione.

Di questi argomenti intendo occuparmi, indugiando sovra di essi solo quel tanto che mi sarà necessario per le applicazioni che dovrò farne nelle Note seguenti.

1. Nel segmento finito $(x_0, \ldots x)$ sia situato l' insieme Ξ di punti $[\xi]$ e si consideri una successione T_1, T_2, $T_3, \ldots$ di scomposizioni del segmento $(x_0, \ldots x)$ fatte in guisa che ogni nuova scomposizione suddivida alcune o tutte le parti prima esistenti e che, ad ogni numero positivo δ, possa farsi corrispondere un indice m tale che, dalla operazione T_m in poi, tutti i tratticelli in cui $(x_0, \ldots x)$ è scomposto, abbiano lunghezza minore di δ. Dopo ogni scomposizione si sommino le lunghezze di quei tratticelli che contengono punti o punti limiti di Ξ. Indicando coteste somme con s_1, s_2, $s_3, \ldots$ si avrà $s_n > 0$, $s_n \geqq s_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ e perciò esisterà il limite $L = \lim_{n=\infty} s_n$, e si avranno le relazioni $s_n \geqq L$, $L \geqq 0$.

Il numero L rappresenta la *estensione esterna* dell' insieme Ξ (¹), diremo anche, con lo Stolz (²) che *compete all' insieme* Ξ, e diremo *discreti* quegli insiemi a cui compete un numero $L = 0$.

Il numero L *è indipendente dal modo con cui le scomposizioni* T_n *si operano.*

(¹) Cfr. Peano, *Applicazioni geometriche del Calcolo*, pag. 152. Per la bibliografia si rimanda all'articolo sugli insiemi che è nell' Enciclopedia.

(²) Math. Annalen, XXIII, pag. 154. Cfr. anche Harnack, Mat. Ann. XIX, pag. 238.

Se un segmento $(x_0, \dots x)$ *finito si scompone in un numero finito di parti, la estensione esterna di un insieme* Ξ *situato in* $(x_0, \dots x)$ *è eguale alla somma delle estensioni delle parti di* Ξ *situate nei singoli tratti in cui* $(x_0, \dots x)$ *fu diviso*, ed, in particolare, *non è minore della estensione di una qualunque sua parte.*

Se in un segmento finito $(x_0, \dots x)$ *è situato un insieme discreto* Ξ, *ad ogni numero positivo* ε *si può far corrispondere un numero positivo* δ *tale che, scomponendo il segmento* $(x_0, \dots x)$ *in tratti tutti minori, in lunghezza, di* δ, *la somma delle lunghezze dei tratti che contengono punti o punti limiti di* Ξ, *sia minore di* ε.

La somma di un numero finito di insiemi discreti situati in uno stesso segmento è ancora un insieme discreto.

Se, scomponendo il segmento $(x_0, \dots x)$ *in un numero finito di parti, i punti dell'insieme* Ξ *contenuti in ciascuna di quelle parti costituiscono altrettanti insiemi discreti, anche l'insieme* Ξ *è discreto.*

Indicando con K l'insieme di tutti i punti che rimangono nell'intervallo $(x_0, \dots x)$ dopo che se ne è sottratto un insieme discreto, si vede agevolmente che: *L'insieme* K *è denso in tutti i punti del segmento* $(x_0, \dots x)$.

2. Consideriamo ora un insieme Ξ di punti $[\xi]$ situati in un intorno $(x_0, \dots \infty)$.

Sia data una successione $x_0, x_1, x_2 \dots$ che tende all'infinito sempre crescendo, cosicchè si sappia che nessuno dei segmenti $(x_n, \dots x_{n+1})$ ha lunghezza nulla. Indichiamo con L_n la estensione esterna della parte di Ξ che è contenuta nel segmento $(x_n, \dots x_{n+1})$.

Se la serie

$$\sum_0^\infty L_n = L_0 + L_1 + L_2 + \cdots \tag{1}$$

converge verso la somma L, *diremo che questo numero* L *compete all'insieme* Ξ, *dato nell'intorno* $(x_0, \dots \infty)$.

3. Per giustificare questa definizione dimostreremo che *il numero* L *non dipende dalla scelta della successione* x_n.

Sia infatti $y_0 = x_0, y_1, y_2, \dots$ una successione che tende all'infinito sempre crescendo. Indichiamo con L'_n la estensione esterna della parte di Ξ contenuta nel segmento $(y_n, \dots y_{n+1})$.

Voglio provare anzitutto che *la serie*

$$\sum_0^\infty L'_n = L'_0 + L'_1 + L'_2 + \cdots \tag{2}$$

è convergente, se è convergente la (1).

Preso un numero positivo σ, a piacere, e determinato l'indice n per modo che il resto $R_n = L_{n+1} + L_{n+2} + \cdots$ della serie convergente ΣL_n,

sia minore di σ, si cerchi poi, nella successione y_n, il primo dei termini che non è minore di x_{n+1}.

Posto che questo termine sia y_{m+1}, dico che la somma di un numero qualunque r di termini, a partire dall' $m+1^{\text{esimo}}$, nella serie (2) è essa pure minore di σ.

Scriviamo la somma: $\lambda'_{m,r} = L'_{m+1} + L'_{m+2} + \cdots + L'_{m+r}$, ed al numero r fissato, facciamone corrispondere uno r_1 abbastanza grande perchè y_{m+r} non sia maggiore di x_{n+r_1}. L' intervallo $(y_{m+1}, \ldots y_{m+r})$ sarà allora tutto contenuto nell' intervallo $(x_{n+1}, \ldots x_{n+r})$, e la estensione esterna della parte di Ξ situata nel primo intervallo, non sarà maggiore di quella relativa alla parte di esso contenuta nel secondo, cioè avremo:

$$\lambda'_{m,r} \leqq L_{n+1} + L_{n+2} + \cdots + L_{n+r_1} \leqq \sigma \qquad \text{c. d. d.}$$

È facile ora vedere che: *anche le somme di quelle due serie sono eguali.*

Indichiamo con $S_n = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$, la somma degli n primi termini delle serie (1), e con $S'_m = L'_1 + L'_2 + \cdots L'_m$, la somma degli m primi termini della (2).

Ad ogni numero n potremo farne corrispondere un altro m abbastanza grande perchè sia $x_n \leqq y_m$, ed al tendere all' infinito di n, anche m diventerà infinito. Si ha però $S_n \leqq S'_m$, ed anche perciò:

$$L = \lim_{n=\infty} S_n \leqq L' = \lim_{m=\infty} S'_m. \tag{3}$$

D'altra parte, ad ogni m fissato, può farsi corrispondere un n_1 tale che sia $x_{n_1} \geqq y_m$, epperò anche $S_{n_1} \geqq S'_m$; da cui

$$L \geqq L'. \tag{4}$$

Dalle (3) e (4) si ricava appunto $L = L'$. c. d. d.

4. Il numero L che compete all' insieme Ξ situato in un intervallo infinito $(x_0, \ldots +\infty)$, e che abbiamo ora dimostrato potersi determinare in modo unico, risulta con legge aritmetica dai limiti L_n supposti già calcolati.

La somma $S_n = L_0 + L_1 + \cdots + L_n$, può ottenersi, però, anche operando al modo seguente:

Si scomponga ciascuno degli intervalli $(x_0, \ldots x_1)$, $(x_1, \ldots x_2), \ldots,$ $(x_n, \ldots x_{n+1})$ in parti di lunghezza non maggiore di un determinato numero δ, si indichi con $L_r(\delta)$ la somma delle lunghezze dei tratti che contengono punti, o punti limiti di Ξ, e sono contenuti nel segmento $(x_r, \ldots x_{r+1})$, $(r = 0, 1, 2 \ldots n)$, si faccia la somma

$$S_n(\delta) = L_0(\delta) + L_1(\delta) + \cdots + L_n(\delta),$$

e se ne cerchi il limite per $\delta = 0$: si avrà appunto

$$S_n = \lim_{\delta=0} S_n(\delta)\,. \tag{5}$$

Ora, benchè si sappia che tutti i limiti (5) esistono finiti e determinati, e che esiste, pure finito e determinato il limite

$$\lim_{n=\infty} S_n = L\,, \tag{6}$$

non si può asserire che, per valori di δ *abbastanza piccoli, esista anche il limite*:

$$\lim_{n=\infty} S_n(\delta) = L(\delta)\,, \tag{7}$$

cioè che converga la serie $\sum_0^\infty L_n(\delta)$, *e non si può, in generale, dedurre*:

$$L = \lim_{n=\infty} \Big\{ \lim_{\delta=0} S_n(\delta) \Big\} = \lim_{\delta=0} \Big\{ \lim_{n=\infty} S_n(\delta) \Big\}\,. \tag{8}$$

Ciò accadrà solo quando la serie $\sum_0^\infty L_n(\delta)$, *convergente, come abbiamo supposto, per* $\delta = 0$, *converga uniformemente a tratti in un intorno determinato di questo punto* [1].

Quando tale condizione sia soddisfatta, *il numero* L *che compete all'insieme* Ξ, *coincide con la sua estensione esterna.*

5. Il teorema dato al numero 3, e le proprietà fondamentali dei numeri S_n che competono ad insiemi situati in segmenti finiti, permettono di enunciare anche il metodo seguente per la determinazione del numero L che compete all'insieme Ξ situato nell'intorno $(x_0\,, \ldots \infty)$:

Fissato un numero positivo δ, *si scomponga il segmento* $(x_0\,, \ldots x)$ *in parti tutte minori di* δ, *si faccia la somma* $S(x\,, \delta)$ *delle lunghezze di quelle parti che contengono punti, o punti limiti di* Ξ, *si calcoli il limite*:

$$\lim_{x=\infty} \Big\{ \lim_{\delta=0} S(x\,, \delta) \Big\} = L\,. \tag{9}$$

Se ha luogo la convergenza uniforme di cui s'è fatto parola al numero precedente, è indifferente l'ordine secondo cui si eseguiscono le due operazioni di passaggio al limite, e si ha anche

$$L = \lim_{\delta=0} \Big\{ \lim_{x=\infty} S(x\,, \delta) \Big\} \tag{10}$$

[1] Cfr. Arzelà, *Sulle serie di Funzioni* (Mem. R. Acc. delle Sc. di Bologna, a. 1899, pag. 153).

ma se quella convergenza uniforme manca, e v' è solo la convergenza ordinaria per $\delta = 0$, si dovrà esclusivamente far uso delle (9).

6. Se la serie $\sum_0^\infty L_n$ *diverge*, non esiste, o se si vuole, è *infinito* il numero L che compete all'insieme Ξ, diverge a maggior ragione anche ogni serie $\Sigma L(\delta)$ e si ha:

$$\lim_{x=\infty} \left\{ \lim_{\delta=0} S(x, \delta) \right\} = \lim_{\delta=0} \left\{ \lim_{x=\infty} S(x, \delta) \right\} = \infty . \tag{11}$$

7. *Perchè sia possibile la determinazione del numero (finito)* L *che compete ad un insieme* Ξ, *situato nell'intorno* $(x_0, \ldots \infty)$, *occorre e basta che ad ogni numero positivo* ε *se ne possa far corrispondere un altro* x_ε *abbastanza grande, perchè i punti ed i punti limiti di* Ξ *situati nel segmento* $(x_\varepsilon, \ldots x)$, *qualunque sia* $x > x_\varepsilon$, *possano essere rinchiusi in un insieme di tratti la cui lunghezza totale non superi* ε.

Perchè, oltre a ciò, l'insieme Ξ *abbia estensione esterna finita, occorra e basta, che, la condizione superiormente enunciata, possa esser soddisfatta col dividere il segmento* $(x_\varepsilon, \ldots x)$ *in tratti tutti minori, in lunghezza, di un numero positivo* δ, *indipendente da* x.

8. In particolare per la esistenza del numero (finito) L, *è condizione necessaria, che ad ogni coppia di numeri positivi* ε, M, *se ne possa far corrispondere un terzo* $x_{\varepsilon,\mathrm{M}}$ *abbastanza grande, perchè la estensione esterna della parte di* Ξ *contenuta nel segmento* $(x, \ldots, x + \mathrm{M})$, $x \geqq x_{\varepsilon,\mathrm{M}}$ *non sia maggiore di* ε.

9. È importante, per quel che segue, notare che *se un insieme* Ξ *soddisfa cotesta condizione, il rapporto* $\dfrac{S_n}{x_n - x_0}$ *della estensione esterna della parte di* Ξ *situata nel segmento* $(x_0, \ldots x_n)$ *alla lunghezza del segmento stesso, tende allo zero quando* x_n *tende all' infinito.* Ed infatti, poichè è indifferente la scelta della successione x_n, prendo $x_n = x_0 + n\mathrm{M}$. Per le ipotesi poste posso scrivere (¹)

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n}{x_n - x_0} = \lim_{n=\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} < \frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}$$

ε, M, sono positivi qualunque, dunque è $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{S_n}{x_n - x_0} = 0$.

10. Gli insiemi che soddisfano la condizione enunciata al n. 9 (in particolare quindi, anche quelli che soddisfano quella del n. 8) hanno, nelle ricerche che dovrò fare nelle Note seguenti, importanza specialissima.

(¹) Cfr. Cesàro, *Analisi Algebrica*, pag. 98.

Quando ciò non possa generare confusione, li indicheremo semplicemente col simbolo Ξ_2 ed *indicheremo con* K_2 *l'insieme dei punti che rimangono in un intorno* $(x_0, \ldots \infty)$ *quando se ne sono sottratti tutti i punti di un insieme* Ξ_2.

Dalle date definizioni si deduce che, *il rapporto fra la estensione esterna della parte di un insieme* Ξ_2 *situata nel segmento* $(x_0, \ldots x)$ *e quella della corrispondente parte dell'insieme* K_2, *tende allo zero per* x *tendente all'infinito.*

Non si deve escludere che ad un insieme Ξ_2 possa competere un numero L finito o nullo, ma rimane escluso che un insieme Ξ_2 possa contemporaneamente essere un insieme K_2.

11. La somma di un numero finito di insiemi Ξ_2 è ancora un insieme Ξ_2.

12. Fra gli insiemi che ammettono numero finito L, meritano speciale attenzione quelli per i quali è $L = 0$.

Essendo $L = \sum\limits_0^\infty L_n$, $L_n \geqq 0$, perchè sia $L = 0$ occorre e basta che i numeri L_n sieno tutti singolarmente nulli, cioè che la parte dell' insieme dato che è situata in qualunque segmento finito abbia estensione esterna nulla.

Diremo che un tale insieme è *discreto in qualunque sua parte finita*, o più brevemente che è *discreto.*

Un insieme discreto, quando manchi la convergenza uniforme nella serie $\Sigma L_n(\delta)$ *può non avere estensione nulla*, ma *se un insieme ha estensione esterna nulla, è certamente discreto.*

13. Indicheremo brevemente un insieme discreto col simbolo Ξ_1, ed indicheremo con K_1 l'insieme dei punti che rimangono nell'intorno $(x_0, \ldots + \infty)$ dopo che se ne è sottratto un insieme Ξ_1.

14. La somma di un numero finito di insiemi discreti è ancora un insieme discreto.

15. Un insieme K_1 è denso egualmente in tutti i punti dell' intorno dove esso è situato.

16. Un insieme discreto è sempre anche un insieme Ξ_2, ed un insieme K_2 è sempre parte di un insieme K_1.

17. Se tutti i punti di un insieme K_1 soddisfano una stessa condizione, potremo dire che quella condizione è *generalmente soddisfatta* nei punti dell' intorno $(x_0, \ldots + \infty)$ dove K_1 è situato.

18. Sia

$$y = f(x) \tag{12}$$

una funzione ad un valore, finita, continua, sempre crescente della variabile reale x, data nell' intorno $(x_0, \ldots + \infty)$ e sia

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \infty . \tag{13}$$

I punti dell' intorno $(x_0, \dots \infty)$ sono posti, mediante la (12) in corrispondenza biunivoca, ordinata, continua, con quelli dell'intorno $(y_0 = f(x_0), \dots + \infty)$.

Ad un insieme di punti $[\xi]$ situati nell' intorno $(x_0, \dots + \infty)$ corrisponderà un insieme di punti $[\eta]$ situati nell' intorno $(y_0, \dots + \infty)$ e reciprocamente.

A punti contenuti nel segmento $(x_1, \dots x_2)$, corrisponderanno punti situati nel segmento $(y_1 = f(x_1), \dots\ y_2 = f(x_2))$; quando la lunghezza dell' intervallo $(x_1, \dots x_2)$ si faccia tendere allo zero, così succederà di quella dell' intervallo $(y_1, \dots y_2)$ e reciprocamente.

Pel noto teorema di Cantor, sulla continuità uniforme, potremo inoltre fissare un numero δ_ε abbastanza piccolo, perchè, ad ogni intervallo $(x_1, \dots x_2)$ contenuto in $(x_0, \dots \infty)$ ed avente lunghezza non maggiore di δ_ε, corrisponda un intervallo $(y_1, \dots y_2)$ di lunghezza minore del numero positivo ε.

Notiamo ancora che se si ha una successione x_n di punti x tendenti all' infinito sempre crescendo, si avrà corrispondentemente una successione di numeri y_n sempre crescenti, tendenti all' infinito.

19. Le considerazioni fatte, ed i risultamenti ottenuti al n. 7 ci permettono di concludere che: *Se ad un insieme di punti* $[\xi]$ *situati nell'intorno* $(x_0, \dots + \infty)$, *compete un numero finito* L, *anche al corrispondente insieme* $[\eta]$ *compete un numero finito* L', *e reciprocamente.* Se è $L = 0$, anche $L' = 0$, cioè *ad insiemi discreti corrispondono insiemi discreti.*

20. Poniamo ora che nell' intorno $(x_0, \dots + \infty)$ sia situato un insieme $\Xi_2(\xi)$ tale che il rapporto $\dfrac{S(x)}{x - x_0}$ della estensione esterna della parte di esso contenuta nel segmento $(x_0, \dots x)$ alla lunghezza del segmento stesso, sia infinitesima per $x = \infty$.

L' estensione esterna della parte dell' insieme $[\eta]$ contenuta nel corrispondente segmento $(y_0, \dots y(x))$ sarà espressa da $S(f(x))$, e, poichè al tendere di x all' infinito, anche $f(x)$ tende all' infinito, e reciprocamente, avremo:

$$\lim_{y=\infty} \frac{S(y)}{y - y_0} = 0$$

e l' insieme $[\eta]$ sarà a sua volta un insieme Ξ_2.

Dunque, ad insiemi Ξ_2 dell' intorno $(x_0, \dots \infty)$, corrispondono pure insiemi Ξ_2 dell' intorno $(y_0, \dots \infty)$, e così ad insiemi K_2 corrispondono insiemi K_2, e reciprocamente.

Matematica. — *Sugli spazî a quattro dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Questa Nota riassume una parte dei risultati di una Memoria di prossima pubblicazione, che fa seguito a un'altra [1] sulla teoria generale degli spazî a un numero qualsiasi di dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti e sulla loro determinazione.

In questa io ho dato il metodo generale che serve a trovare per quadrature tutti questi spazî: metodo che permette di ritrovare rapidamente gli spazî a tre dimensioni, già determinati dal prof. Bianchi, che ammettono un gruppo di movimenti. Non è però più così quando si passa a un numero maggiore di dimensioni: i calcoli infatti a tale scopo che la Memoria citata indica da eseguire risultano troppo lunghi per potere essere effettivamente eseguiti. In questa Nota io indicherò sommariamente come si debba procedere per gli spazî a quattro dimensioni. Si comincia, secondo il metodo generale, a trovare prima i gruppi di movimenti per poi dedurne gli spazî relativi; e anzitutto si cerca di avere « a priori » qualche proprietà generale di questi gruppi. Si escludono dalla ricerca come casi senza interesse i gruppi con meno di quattro trasformazioni linearmente indipendenti, che (com'è del resto evidente) i miei teoremi generali dimostrano potersi già considerare come gruppi di movimenti di uno spazio a meno di quattro dimensioni e che quindi sono gruppi riducibili ai casi già studiati dal prof. Bianchi [2].

Così pure è inutile trattare i gruppi transitivi a quattro parametri (che del resto ho già studiato nella Memoria citata), perchè noi sappiamo già da teoremi generali che essi si possono considerare sempre come gruppi di movimenti. Possiamo pure prescindere dai gruppi a 10 parametri, che corrispondono agli S_4 a curvatura costante.

Ciò può già servire a circoscrivere di molto la ricerca.

Ma i due teoremi fondamentali che servono a trovare tutti gli altri gruppi sono i seguenti:

I. *Non esiste alcun gruppo* G_9 [3] *che si possa considerare come gruppo di movimenti di un* S_4 [4].

[1] Quest'ultima Memoria si sta ora pubblicando negli Annali di Matematica.

[2] Bianchi, *Sugli spazî a tre dimensioni* ecc. Memorie della Società Italiana delle Scienze (serie III, tomo 11, pag. 27). Cfr. anche la mia Mem. citata.

[3] Con G_r indico un gruppo a r parametri.

[4] Per vedere bene il significato di questo teorema, cfr. la mia Mem. citata (§ 8).

II. *Se un gruppo* G_r $(r = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ *si può considerare come gruppo di movimenti di uno spazio a quattro dimensioni, esso contiene certamente un sottogruppo* G_{r-1}.

Questi due teoremi si possono stabilire « a priori »; e la loro conoscenza dà poi una grande rapidità alla ricerca. Noi sappiamo da essi che basterà restringerci allo studio di quei gruppi a 5, 6, 7, 8 parametri su quattro variabili, che ammettono rispettivamente qualche sottogruppo a 4, 5, 6, 7 parametri. Questo teorema si può poi generalizzare anche nel caso di spazî a più che quattro dimensioni e ci darà sempre l'ordine di qualche sottogruppo contenuto nei gruppi da determinare.

Nel caso particolare di spazî a quattro dimensioni la ricerca si presenta con questo metodo abbastanza semplice, e può servire come esempio del metodo da seguire negli altri casi. Siccome ogni G_r del nostro tipo contiene come sottogruppo un G_{r-1}, che naturalmente si potrà anch'esso considerare come gruppo di movimenti (totale o parziale) di uno spazio a quattro dimensioni, noi dovremo dapprima ricercare tutte le composizioni dei gruppi a 5 parametri, che contengono un sottogruppo a 4 parametri che si possa considerare come gruppo di movimenti di uno spazio a 4 dimensioni, cioè che appartenga a uno dei tipi di G_4 già determinati dal prof. Bianchi, o che sia transitivo.

La ricerca si semplifica molto trascurando quelli di questi gruppi che contengono un sottogruppo G_4 a trasformazioni permutabili, perchè gli S_4 che ammettono un tale gruppo G_4 di movimenti sono a curvatura nulla (1).

Dalla composizione di uno di questi G_5 si passa facilmente alla forma esplicita delle sue trasformazioni infinitesime, perchè noi conosciamo già le trasformazioni infinitesime di un suo sottogruppo G_4; e noi possiamo senz'altro trascurare (2) quelli che avessero due trasformazioni infinitesime dipendenti. Di più noi possiamo prima trovare quei G_5 che contengono un sottogruppo G_4 transitivo, ma che non contengono inoltre un G_4 intransitivo, e determinare poi separatamente quei G_5 che contengono un sottogruppo G_4 intransitivo che si possa considerare come gruppo di movimenti. Con questi e altri mezzi la ricerca si semplifica assai. Valendoci poi dei criterî generali dati nella mia Memoria citata, si esamina quali dei G_5 così ottenuti è un gruppo di movimenti.

Con metodo analogo si trovano i G_6 che contengono uno di questi G_5 come sottogruppo e che si possono ancora considerare essi stessi come gruppo di movimenti e così via. I risultati che si ottengono sono i seguenti:

« *Nessun gruppo a 8 parametri si può considerare come gruppo di movimenti di uno spazio a 4 dimensioni* ».

(1) Bianchi, loc. cit.
(2) Bianchi, loc. cit.

Uno spazio a n dimensioni non può ammettere alcun gruppo di movimenti a « $\frac{n(n+1)}{2}-1$ *» o a «* $\frac{n(n+1)}{2}-2$ *» parametri.*

Oltre ai gruppi già citati, vi sono soltanto i seguenti spazi a quattro dimensioni, che ammettono un gruppo continuo di movimenti:

$$\text{I. } ds^2 = dx_4^2 + \frac{1}{4n_1} e^{-4x_4} dx_1^2 + p_{22} e^{-2x_4} dx_2^2 - 2l_3 p_{22} e^{-2x_4} dx_1 dx_2 -$$

$$- 2l_3 p_{22} x_1 e^{-2x_4} dx_1 dx_3 + 2x_1 p_{22} e^{-2x_4} dx_2 dx_3 + (x_1^2 p_{22} e^{-2x_4} - n_1 p_{22} e^{2x_4}) dx_3^2$$

che ammette il gruppo generato dalle:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} ; \frac{\partial}{\partial x_3} ; -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} ; -2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - (l_3 x_1 + x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$(x_1^2 + n_1 e^{4x_4}) \frac{\partial}{\partial x_1} + (l_3 x_1^2 + l_3 n_1 e^{4x_4}) \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_2 - l_3 x_1) \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove la l_3, la n_1, e la p_{22} sono costanti.

$$\text{II. } ds^2 = dx_4^2 + p_{11} e^{2x_4} dx_1^2 + 2p_{12} e^{x_4} dx_1 dx_2 + 2p_{13} e^{x_4} dx_1 dx_3 +$$
$$+ p_{22} dx_2^2 + 2p_{23} dx_2 dx_3 + p_{33} dx_3^2$$

che ammette il gruppo generato dalle

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (i = 1, 2, 3) ; x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_4} ; (x_1^2 - \pi_{11} e^{-2x_4}) \frac{\partial}{\partial x_1} - 2\pi_{12} e^{-x_4} \frac{\partial}{\partial x_2} -$$
$$- 2\pi_{13} e^{-x_4} \frac{\partial}{\partial x_3} - 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove le p_{ik} sono costanti, e le π_{ik} sono i complementi algebrici di p_{ik} in $|p_{ik}|$ divisi per il determinante $|p_{ik}|$.

$$\text{III. } ds^2 = dx_4^2 + e^{2\lambda x_4} dx_1^2 + \mu e^{4\lambda x_4} dx_2^2 + 2\mu x_1 e^{4\lambda x_4} dx_2 dx_3 +$$
$$+ (\mu x_1^2 e^{4\lambda x_4} + e^{2\lambda x_4}) dx_3^2$$

dove λ, μ sono costanti, che ammette il gruppo

$$\frac{\partial}{\partial x_2} ; \frac{\partial}{\partial x_3} ; \lambda x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2\lambda x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \lambda x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} ; \frac{\partial}{\partial x_1} -$$
$$- x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} ; x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

IV. Gli elementi lineari (dove con λ, n, l indichiamo delle costanti),

$$ds^2 = dx_4^2 + \varphi\, dx_1^2 + \psi\, dx_3^2 + e^{2x_1} [(1 - n^2) \varphi + \psi n^2] dx_2^2 + 2n \psi e^{x_1} dx_2 dx_3$$

dove è rispettivamente $\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \text{cost.}$ oppure $\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \text{cost.}\ e^{2\lambda x_4}$

oppure $n = 0$, $\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \dfrac{\cosh^2(l_3\, \lambda_{25}\, x_4 + \text{cost.})}{l_3^2}$ oppure $\varphi = \text{cost.}$, $n = 0$, $\psi = -\left(\dfrac{1}{\lambda_{25}\, x_4 + n_3}\right)^2$ ammettono pure dei G_5. Questi G_5 contengono tutti il G_4 generato dalle:

$$-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{n}{1 - n^2} e^{-x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} ; -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} ; \frac{\partial}{\partial x_2} ; \frac{\partial}{\partial x_3} .$$

La quinta trasformazione del corrispondente G_5 è rispettivamente

$$\frac{\partial}{\partial x_4} ; \lambda x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} ; e^{\lambda_{25} x_3} \left[l_3 \operatorname{tangh} (l_3\, \lambda_{25}\, x_4 + \text{cost.}) \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} \right] ;$$

$$e^{\lambda_{25} x_3} \left[\frac{1}{\lambda_{25}\, x_4 + n_3} \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} \right]$$

V. Quattro elementi lineari riducibili ai precedenti per via immaginaria.

VI. $$ds^2 = dx_4^2 + \varphi dx_1^2 + \psi dx_3^2 + \varphi e^{2x_1} dx_2^2$$

dove φ, ψ sono costanti non nulle. Esso è un caso particolare di uno degli spazî IV e oltre al corrispondente G_5 ammette la

$$x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

VII. Lo stesso elemento lineare che al secondo tipo del caso IV, dove però $\psi = -\dfrac{1}{2\lambda n_3} e^{2\lambda x_4}$. Esso ammette anche la:

$$\left(\lambda \frac{x_3^2}{2} + n_3\, e^{-2\mu x_4}\right) \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

VIII. $$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + e^{2x_2} (dx_3^2 + dx_4^2) .$$

Esso ammette il G_7 generato dalla $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ e dal G_6 (intransitivo) che trasforma in sè la forma quadratica a curvatura costante

$$dx_2^2 + e^{2x_2} (dx_3^2 + dx_4^2) \quad (^1).$$

Nella Memoria qui in parte riassunta studio poi quale è il gruppo totale effettivo a cui appartengono gli S_4 già determinati per valori generici delle costanti di integrazione e particolarmente il caso più difficile degli S_4 che ammettono un G_4 transitivo: e si ottiene con una discussione piuttosto difficile (perchè al calcolo effettivo non si può in alcuni casi certo ricorrere)

(1) Vi è poi un altro spazio riducibile a questo per via immaginaria.

che vi sono soltanto i seguenti G_4 transitivi tali che tutti gli spazî che ammettono uno di essi ammettono un gruppo più ampio e cioè il G_4 generato dalle

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (i = 1, 2, 3, 4),$$

i cui spazî corrispondenti sono euclidei e il gruppo generato dalle

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (i = 1, 2, 3), \quad x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_4}$$

i cui spazî corrispondenti (indicando con le « h » delle costanti)

$$ds^2 = dx_4^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + 2h_{12}\, dx_1\, dx_2 + 2x_4\, dx_2\, dx_3 + \\ + 2(h_{12}\, x_4 + h_{13})\, dx_1\, dx_3 + (x_4^2 + h_{33})\, dx_3^2$$

ammettono anche la

$$h_{13}\, x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left[\left(\frac{1 - h_{12}^2}{2} x_4^2 - h_{12}\, h_{13}\, x_4\right) - \mathrm{H} \frac{x_3^2}{2}\right] \frac{\partial}{\partial x_2} - \\ - (1 - h_{12}^2)\, x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} + \mathrm{H}\, x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove $\mathrm{H} = h_{33} - h_{33}\, h_{12}^2 - h_{13}^2$ è il discriminante (non nullo) della forma.

Chimica. — *Su di un probabile nuovo ossido dell'azoto.* Nota preliminare del dott. DEMETRIO HELBIG, presentata dal Socio S. CANNIZZARO.

Facendo passare una serie di scariche elettriche attraverso l'aria liquida, ho ottenuto la formazione d'una sostanza solida a quella temperatura, fioccosa, di colore verdastro.

Questo corpo è estremamente instabile. Anche a temperatura assai bassa si decompone, sviluppando vapori rutilanti. La scomposizione, in certi casi, si fa con esplosione, accompagnata da fenomeno luminoso.

Tanto le condizioni in cui il corpo si forma, quanto i suoi caratteri, dimostrano essere quella sostanza un ossido dell'azoto: ossido, le cui proprietà differiscono da quelle di tutte le combinazioni dell'azoto con l'ossigeno finora ben conosciute.

Mi riservo di riferire fra breve circa il risultato delle indagini in corso, tendenti a determinare la composizione di questa sostanza, e di esporre più estesamente le condizioni sperimentali richieste per la sua preparazione.

Anatomia. — *Osservazioni sopra lo sviluppo del corpo calloso e sui rapporti che esso assume colle varie formazioni dell'arco marginale nel cervello del maiale e di altri mammiferi domestici*. Nota del dott. PRIMO DORELLO, presentata dal Socio TODARO.

Tutti gli autori, i quali si sono occupati dello sviluppo del corpo calloso, vanno d'accordo nell'ammettere che esso si formi in un'area, nella quale le pareti emisferiche mediali si saldano tra loro: l'accordo però non esiste sulla esatta posizione di questa area di saldamento. Secondo Schmidt (1), l'abbozzo del corpo calloso s'avanza tra i due archi marginali, ed allora l'arco marginale interno forma il trigono col setto pellucido e si continua innanzi colla lamina terminale ispessita, che forma i pilastri anteriori del fornice. Secondo Blumenau (2) il corpo calloso si forma a livello dell'arco marginale esterno e, siccome in corrispondenza del corpo del fornice manca il solco fimbriodentato, quivi si ha una fusione primitiva tra fornice e corpo calloso. Martin (3), che ha studiato l'argomento in embrioni di gatto, sostiene che la massa ventrale del corpo calloso si forma da fibre, che decorrono nell'arco marginale interno, lo splenio da fibre, che vanno da un lato all'altro passando tra i due archi marginali, la massa del corpo calloso ed il ginocchio da fibre, che attraversano l'arco marginale esterno: egli, rilevando che, mentre nell'uomo la fessura d'ippocampo corre attorno allo splenio dorsalmente, nel gatto invece termina ventralmente allo splenio, viene a concluderne che non sono ammissibili *comparazioni immediate del corpo calloso e delle formazioni derivate dall'arco marginale tra l'uomo e gli animali domestici*, e *che, almeno nel gatto, il solco sopracallosale non può essere considerato come prolungamento della fessura d'ippocampo*. A causa di questa grande divergenza nei risultati, il Prenant (4) crede che il corpo calloso possa formarsi in punti differenti dell'arco marginale, e che perciò le formazioni derivate da questo arco possano trovarsi secondo gli animali o al di sopra o al di sotto del corpo calloso.

(1) Schmidt, *Beiträge zur Entwicklungsgeschichte des Gehirns*, in: Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. XI, 1862.

(2) Blumenau, *Zur Entwicklungsgeschichte und feineren Anatomie des Hirnbalkens*, in: Arch. mikr. Anat. Bd. XXXVII, 1891.

(3) Martin, *Zur Entwicklung des Gehirnbalkens bei der Katze*, in: Anat. Anzeiger. Bd. IX (S. 156-162, S. 472-476). — *Bogenfurche und Balkenentwickelung bei der Katze*, in: Jeneische Zeitschr. f. Naturw. Bd. XXIX, 1894.

(4) Prenant, *Éléments d'Embryologie de l'homme et des vertébrés*. V. II, 1896.

Data la grande precocità colla quale si formano nei mammiferi il solco arcuato ed il fimbriodentato, e dati tutti gli altri caratteri per cui questi solchi assumono un significato di valore morfologico molto più alto, che non sia quello degli altri solchi, sembrava poco ammissibile una differenza di comportamento così notevole nei varî gruppi di mammiferi. Ed è perciò che mi sono proposto di determinare con esattezza il campo, nel quale si svolgono i fenomeni di origine e di accrescimento del corpo calloso del maiale.

Per tale studio mi sono valso di una collezione di circa cento cervelli embrionali, che ho potuto raccogliere nel periodo di due anni.

Nella presente Nota preliminare mi limito ad esporre i principali risultati ottenuti tanto coll' esame macroscopico, che col microscopico.

In embrioni molto giovani, cioè della lunghezza di 38 mm., nella faccia mediale degli emisferi si vede un solco curvilineo ininterrotto, che è il solco arcuato: questo ordinariamente va distinto in anteriore, per la porzione che si trova sulla parte piana della faccia mediale, ed in posteriore, per la porzione situata sulla parte escavata. A quest' epoca il solco arcuato anteriore è molto più profondo del posteriore e nel punto di passaggio dall' una all' altra porzione si ha la minima profondità. Nel seguito dello sviluppo, mentre il solco arcuato posteriore si va approfondando sempre più, l' anteriore invece diviene sempre più superficiale, tantochè negli embrioni di centimetri 8 talvolta sembra scomparso. Però anche in quest' epoca, se il cervello sia stato tenuto per qualche tempo in alcool assoluto, esso è bene visibile. Intanto è comparso un nuovo solco, cioè il fimbriodentato, che divide l'arco marginale in due archi; uno esterno o giro dentato, l' altro interno o fimbria.

Se noi osserviamo la faccia mediale degli emisferi in un embrione di 8 centimetri, troviamo che il solco arcuato, cominciando verso l' apice del lobo piriforme, si estende per tutta la parte escavata e poi si continua ininterrotto, ma assai attenuato, lungo la parte piana decorrendo parallelamente ed un po' al di sopra dell'abbozzo del corpo calloso. Il solco fimbriodentato decorre immediatamente sotto e parallelamente al precedente e giunto sulla parte piana della faccia mediale emisferica, costeggia quell' ispessimento della parte superiore della lamina terminale, in cui decorrono i fasci fibrosi del corpo calloso. Sicchè a quest' epoca l' arco marginale si estende ininterrotto e sempre limitato da due solchi dall' apice del lobo piriforme fino al davanti della estremità anteriore dell' abbozzo del corpo calloso. L' arco marginale interno nasce anche esso verso l'apice del lobo piriforme e, delimitato dal solco fimbriodentato e dalla fessura coroidea, decorre parallelo all'arco esterno finchè giunto al di sopra del foro di Monro, si slarga e si continua direttamente nella lamina terminale. Il suo margine inferiore, si continua in quel rilievo che delimita superiormente e medialmente il foro di Monro, e che più tardi dà luogo ai pilastri anteriori del fornice. Il suo margine superiore si con-

tinua col corrispondente di quell' ispessimento della lamina terminale, in cui si è sviluppato il corpo calloso, e perciò con quella sottile porzione di tale ispessimento, che riveste la faccia superiore del corpo calloso e che più tardi darà luogo all' indusio grigio. Il corpo calloso si presenta assai piccolo, appiattito dall' alto al basso, con una estremità anteriore libera arrotondata, con una estremità posteriore, la quale viene ad impiantarsi e perdersi nel corpo dell' arco marginale interno, nel punto in cui questo passa al di sopra del foro di Monro.

Negli embrioni di cent. 11 si scorge ancora che l' arco marginale esterno si estende ininterrotto dall' apice del lobo piriforme fino all' estremo anteriore del corpo calloso e così pure ininterrotti sono i due solchi che lo limitano, cioè il solco arcuato ed il fimbriodentato; però la parte dell' arco esterno, che si trova in rapporto col corpo calloso, è molto meno sviluppata della restante. L' estremità posteriore del corpo calloso ora si ripiega per un brevissimo tratto verso il basso e verso l' avanti, e l' estremo anteriore di questa parte, che chiamerò porzione riflessa del corpo calloso, viene ad impiantarsi sulla massa dell' arco marginale interno nel punto in cui questo si ripiega per circondare superiormente il foro di Monro. L' arco marginale interno comincia a presentarsi diviso per un tenue solco in due parti, una esterna, che portandosi verso l' alto sembra per la massima parte perdersi nella porzione riflessa del corpo calloso, una interna che delimita tutta la periferia della fessura coroidea ed oltrepassato il foro di Monro si continua in basso e si perde nella regione mammillare, entrando così nella costituzione delle colonne anteriori del fornice.

Negli embrioni di cent. 12 il corpo calloso si è notevolmente sviluppato, ed il suo sviluppo è avvenuto principalmente nel senso anteroposteriore, sicchè, mentre negli stadî antecedenti esso non raggiungeva la metà posteriore degli emisferi, ora invece occupa tutto il terzo medio dell' asse longitudinale di questi. In tale allungamento il corpo calloso ha sempre seguito la via del solco fimbriodentato, però siccome questo solco si dirige curvilineamente verso il basso, mentre il corpo calloso si porta direttamente verso l' indietro, esso ha sospinto le formazioni che ha incontrato, cioè l' arco marginale esterno ed i due solchi che lo limitano, obbligandole a descrivere una curva attorno allo splenio. Si vede così l' arco marginale esterno portarsi dapprima sotto il corpo calloso e, giunto un millimetro avanti lo splenio, ripiegarsi bruscamente indietro, girare attorno allo splenio e poi lungo la faccia superiore del corpo calloso fino all' estremo anteriore di questo. La porzione posta sotto il corpo calloso è bene sviluppata, giro dentato, la porzione che gira attorno allo splenio, fasciola cinerea, si va invece assottigliando gradatamente man mano che si porta verso l' alto, la porzione che costeggia il corpo calloso, nervi laterali del Lancisi, è la più sottile. La parte riflessa del corpo calloso è aumentata di volume e si continua netta-

mente per ogni lato colla porzione esterna dell'arco marginale interno, mentre che la porzione interna di questo, segue una via ininterrotta dall'apice del lobo piriforme fino alla regione mammillare, costeggiando esternamente la fessura coroidea.

Negli embrioni di centimetri 15 il corpo calloso è ancora aumentato, sicchè occupa i due quinti della lunghezza totale degli emisferi e questo allungamento ha prodotto una maggiore inflessione dell' arco marginale esterno in modo che il giro dentato giunge circa due millimetri innanzi lo splenio. La continuazione del giro dentato colla fasciola cinerea e coi nervi laterali del Lancisi è sempre evidentissima. La porzione riflessa del corpo calloso è aumentata ed insieme colla corrispondente porzione diretta e collo splenio delimita una fessura, che è il ventricolo di Verga. Questa porzione riflessa forma sulla linea mediana il mezzo di unione tra i due archi marginali interni, quando essi non si sono ancora ravvicinati tra loro, rappresentando così l' abbozzo dello psalterium.

Negli embrioni di centimetri 22,5 si trova progredito l' allungamento del corpo calloso specialmente verso l' indietro: innanzi è bene distinto il ginocchio ed il becco. La fasciola cinerea è stata ulteriormente sospinta verso l' indietro, sicchè il giro dentato arriva millimetri 4,5 avanti lo splenio. I nervi laterali del Lancisi si sono molto assottigliati e, siccome la corteccia del giro marginale si è alquanto sollevata, essi ne sono rimasti completamente coperti: sembra allora che il solco arcuato anteriore e la porzione nasale del solco fimbriodentato abbiano confluito in un solco unico, che è il seno callosale: nel fondo di questo però i nervi del Lancisi segnano nettamente la separazione tra i due solchi.

Negli embrioni di centimetri 26 si osservano gli stessi fatti, però più accentuati tantochè il giro dentato arriva 9 millimetri avanti lo splenio, distanza che si trova aumentata solo di poco allo stato adulto. Naturalmente la continuazione tra le varie formazioni derivate dall' arco marginale esterno è sempre evidentissima.

Gli stessi fatti, salvo lievi modificazioni, ho potuto ritrovare sopra cervelli embrionali di altri animali domestici, sui quali ho portato la mia osservazione.

Anche l' esame microscopico dei cervelli embrionali a varie epoche di sviluppo ha confermato pienamente, completandoli, i risultati ottenuti coll' esame macroscopico. In corrispondenza del solco arcuato e fimbriodentato avvengono caratteristiche modificazioni istologiche delle pareti, che si conservano anche là dove il solco macroscopicamente è attenuato o sembra scomparso, e che quindi permettono in ogni modo di riconoscerne la presenza e le particolarità.

Nella presente Nota non mi intratterrò su questi risultati microscopici, riserbandomi di esporre tutti i particolari nella Memoria che pubblicherò quanto prima su tale argomento: accennerò solo che il fatto di trovare atte-

nuato od obliterato in determinate regioni il solco arcuato è solo apparente e dovuto quasi esclusivamente ad una proliferazione dello strato bianco corticale, il quale ispessendosi viene a colmare interamente o quasi il solco: il profilo di questo però è conservato perfettamente dal comportamento dello strato grigio corticale e degli strati sottostanti.

Da quanto ho esposto mi credo autorizzato alle seguenti conclusioni:

1.° L'arco marginale esterno si mantiene assolutamente estraneo alla formazione del corpo calloso; esso si conserva sempre ininterrotto e ben delimitato e dà luogo a tre formazioni, la cui struttura istologica, almeno in origine, è identica: queste tre formazioni sono il giro dentato, la fasciola cinerea ed i nervi laterali del Lancisi. Tutto l'arco originariamente ha una posizione dorsale rispetto al corpo calloso e la conserva sempre tanto nell'uomo, che negli animali domestici da me esaminati. Però in questi ultimi si ha un apparente cambiamento di posizione dovuto al fatto, che, mentre l'arco marginale esterno conserva la sua forma arcuata, il corpo calloso si sviluppa orizzontalmente verso l'indietro e sospinge per un certo tratto innanzi a se le formazioni che incontra, obbligandole a descrivere un'ansa che viene a trovarsi sotto lo splenio: così l'estremità superiore del giro dentato, che forma la branca inferiore dell'ansa, e la fasciola cinerea, che ne forma la branca superiore, acquistano secondariamente e passivamente una posizione ventrale rispetto al corpo calloso.

2.° Il solco arcuato è una formazione, che, se non sempre macroscopicamente, almeno istologicamente si presenta continua per tutta la durata della vita.

3.° Il corpo calloso si sviluppa entro un ispessimento della parte superiore della lamina terminale. Il sottile foglietto di lamina terminale, che permane al di sopra dei fasci fibrosi del corpo calloso e che riveste la faccia dorsale di questa formazione, rappresenta l'abbozzo dell'indusio grigio. Siccome la lamina terminale rappresenta la diretta continuazione verso l'innanzi dell'arco marginale interno, possiamo affermare che il corpo calloso si sviluppa entro la parte anteriore dell'arco marginale interno. Accrescendosi verso l'indietro il corpo calloso dovrebbe avanzarsi entro lo spessore dell'arco marginale interno, però, siccome posteriormente l'indusio grigio è quasi niente sviluppato, effettivamente lo splenio va progredendo lungo il solco fimbriodentato e quivi si presenta per tutto il suo ulteriore sviluppo.

4.° Il corpo calloso si compone di due parti, una dorsale, che è la principale e comprende anche lo splenio ed il ginocchio, ed una ventrale, che io ho chiamato porzione riflessa. Tra queste due porzioni c'è uno spazio a forma di fessura, che è il ventricolo di Verga.

5.° L'arco marginale interno si trasforma interamente in una formazione fibrosa.

Le fibre della porzione più periferica di esso si continuano colla porzione

riflessa del corpo calloso, ove s' incrociano colle corrispondenti dell' altro lato dando luogo al così detto *fornice trasverso*, che macroscopicamente equivale alla lira di David o Psalterium dell' uomo. Invece le fibre interne dell' arco marginale interno hanno sempre un percorso longitudinale e, partite dall'apice del lobo piriforme, costeggiando la fessura coroidea giungono fino alla formazione mammillare.

PERSONALE ACCADEMICO

Giunse all'Accademia la dolorosa notizia della morte del Socio straniero Hervé Faye, avvenuta il 4 luglio 1902; apparteneva il defunto all'Accademia sino dal 25 settembre 1900.

ELEZIONI DI SOCI

Colle norme stabilite dallo Statuto e dal Regolamento, si procedette alle elezioni di Soci e Corrispondenti dell'Accademia. Le elezioni dettero i risultati seguenti per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali:

Furono eletti Corrispondenti:

Nella Categoria I, per la *Matematica*: Pascal Ernesto; per la *Meccanica*: Venturi Adolfo.

Nella Categoria II, per la *Fisica*: Donati Luigi.

Nella Categoria III, per la *Geologia e Paleontologia*: Parona Carlo Fabrizio.

Nella Categoria IV, per la *Botanica*: Beccari Odoardo; per l'*Agronomia*: Menozzi Angelo; per la *Patologia*: Lustig Alessandro.

Furono eletti Soci stranieri:

Nella Categoria I, per la *Matematica*: Zeuthen Girolamo; per la *Meccanica*: Lorentz Hendrich Antoon.

Nella Categoria II, per la *Fisica*: Thalèn Roberto.

Nella Categoria IV, per l'*Agronomia*: Wiesner Giulio e De Vries Ugo.

L' esito delle votazioni fu proclamato dal Presidente con Circolare del 13 luglio 1902; le elezioni dei Soci stranieri furono sottoposte all' approvazione di S. M. il Re.

V. C.

[illegible] del corpo calloso, ove s'incrociano colle corrispondenti dell'altro lato dando luogo al così detto [illegible], che [illegible] alla lira di David o psalterium dell'uomo. Invece le fibre interne dell'arco marginale interno hanno sempre un percorso longitudinale e, partite dall'apice del lobo piriforme, costeggiando la fessura [illegible] giungono fino alla formazione ammonitica.

PERSONALE ACCADEMICO

Giunse all'Accademia la dolorosa notizia della morte del Socio straniero [illegible], avvenuta il [illegible] luglio 1909; apparteneva il [illegible] all'Accademia sino dal [illegible] settembre 1900.

ELEZIONI DI SOCI

Colle norme stabilite dallo Statuto e dal Regolamento, si procedette alle elezioni di Soci e Corrispondenti dell'Accademia. Le elezioni dettero i risultati seguenti per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali:

Furono eletti Corrispondenti:

Nella Categoria I, per la Matematica: Pascal Ernesto; per la Meccanica: [illegible].

Nella Categoria II, per la Fisica: [illegible].

Nella Categoria III, per la Geologia e Mineralogia: Parona Carlo Fabrizio.

Nella Categoria IV, per la [illegible]: [illegible]; per l'[illegible]: Menozzi Angelo; per la [illegible]: Lustig Alessandro.

Furono eletti Soci stranieri:

Nella Categoria I, per la Matematica: [illegible]; per la Meccanica: [illegible].

Nella Categoria II, per la Fisica: [illegible].

Nella Categoria IV, per la [illegible]: [illegible].

L'esito delle elezioni fu proclamato dal Presidente con l'ordinanza del 24 giugno 1909; le elezioni dei Soci stranieri furono sottoposte all'approvazione di S. M. il Re.